



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0394
Číslo materiálu	VY_42_Inovace_15_MA_3.01_ Goniometrické vzorce – pracovní list
Název školy	Střední odborná škola a Střední odborné učiliště, Hustopeče, Masarykovo nám. 1
Autor	Mgr. Magda Černáková
Tematický celek	Matematika - ALGEBRA
Ročník	3.ročník
Datum tvorby	23.08.2013
Anotace	Prezentace určena pro třetí ročník maturitních oborů, ve které je stručné shrnutí učiva goniometrické vzorce Zopakuje jednotlivé druhy goniometrických vzorců a jejich úprav. Současně PL slouží k přípravě k MZ.
Očekávaný výstup	Žák si zopakuje jednotlivé druhy goniometrických vzorců a jejich úprav.
Druh učebního materiálu	Jednotlivé snímky lze použít jako studijní materiál.
Pokud není uvedeno jinak, uvedený materiál je z vlastních zdrojů autora	

Goniometrické vzorce :

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\operatorname{cot} g x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

2. Pro každé $m \in \mathbb{Z}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq m \cdot \pi/2$, platí :

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cot} g x = 1$$

3. Součtové vzorce :

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí :

a) $\sin (x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

b) $\sin (x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$

c) $\cos (x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

d) $\cos (x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

Vzorový příklad :

a) Víme, že $\sin x = 0,6$ a přitom $x \in (\pi/2, \pi)$.

Určete hodnoty $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$0,6^2 + \cos^2 x = 1$$

$$0,36 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - 0,36$$

$$\cos^2 x = 0,64$$

$$\cos x = \sqrt{0,64}$$

$$|\cos x| = 0,8$$

$$\text{v intervalu } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ je } \cos x = -0,8$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cot} x = 1$$

$$-0,75 \cdot \operatorname{cot} x = 1$$

$$\operatorname{cot} x = \frac{1}{-0,75} = -1,\bar{3}$$

b) Zjednodušte: $\frac{\cos^3 x - \cos x}{\sin^3 x - \sin x}$

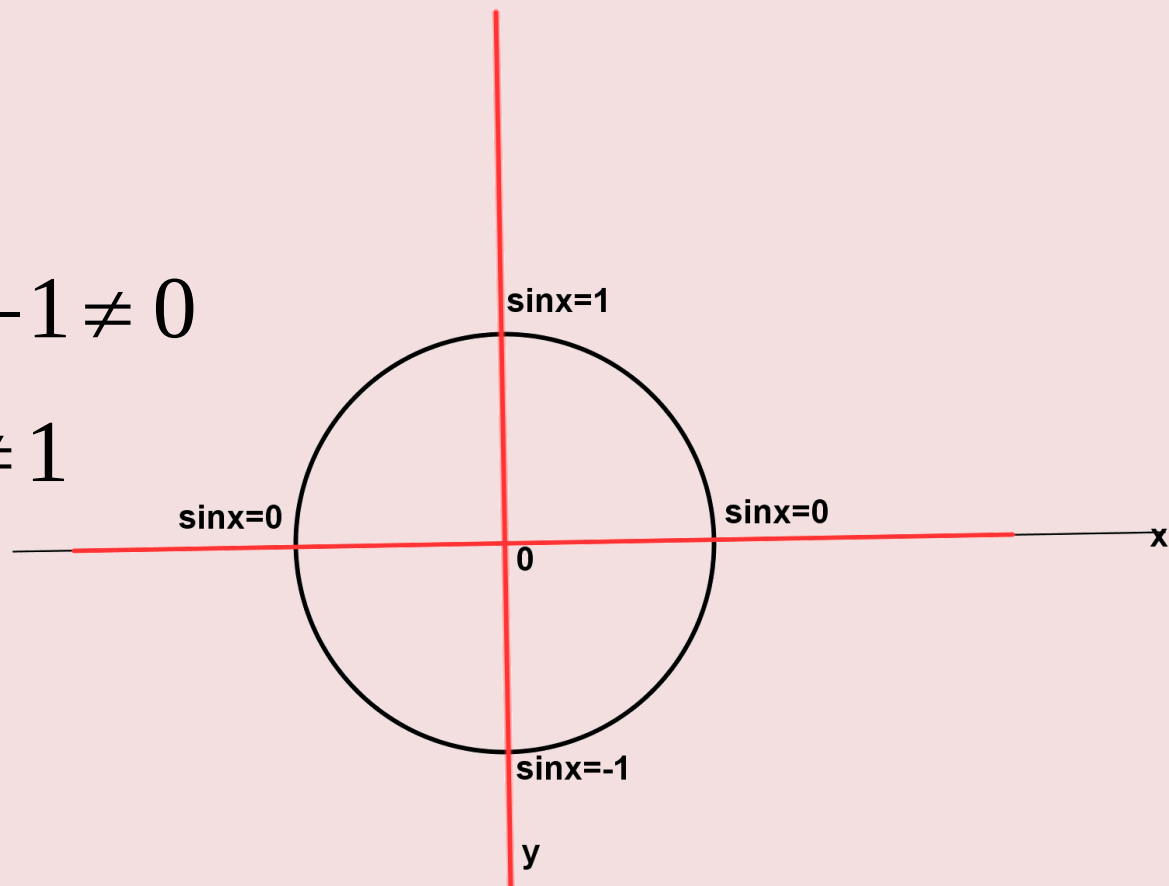
$$\sin^3 x - \sin x \neq 0$$

$$\sin x (\sin^2 x - 1) \neq 0$$

$$\sin x \neq 0 \quad \wedge \quad \sin^2 x - 1 \neq 0$$

$$\sin x \neq 0 \quad \wedge \quad |\sin x| \neq 1$$

$$x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\frac{\cos^3 x - \cos x}{\sin^3 x - \sin x} = \frac{\cos x (\cos^2 x - 1)}{\sin x (\sin^2 x - 1)} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1 - \sin^2 x - 1}{1 - \cos^2 x - 1} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{-\sin^2 x}{-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

c) Zjednodušte: $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x - \left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x \right) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x - \cos \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x =$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{3} \sin x = -2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -\sqrt{3} \sin x$$

d) Dokažte, že platí : $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) =$$

$$= (\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x) \cdot (\sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x) =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 y - \sin^2 y \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y \cdot (1 - \sin^2 x) =$$

$$= \sin^2 x - \sin^2 x \cdot \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 y \cdot \sin^2 x = \sin^2 x - \sin^2 y$$

platí

Pracovní list :

$$Př.1) \cos x = -0,6$$

$$Určr: \sin x, \operatorname{tg} x, \cot g x, \text{ je-li } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$Př.2) \cot g x = -\frac{1}{3}$$

$$Určr: \operatorname{tg} x, \sin x, \cos x, \text{ je-li } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$$

$$Př.3) \text{Dokažte, že platí: } \frac{1 + \cot g^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \cot g^2 x$$

$$\text{pro } x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Př.4) Zjednodušte :

$$a) \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$$

$$b) \sin^2 x \cdot \cot^2 x - \sin^2 x + 1$$

$$c) \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

$$d) \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

Př.5) Řešte rovnice :

$$a) \operatorname{tg} x - \cot x = 1$$

$$b) \cos^2 x - 6 \sin x + 6 = 0$$

Př.6)Dokažte, že platí : *Př.7)Zjednodušte :*

$$a) \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$b) \operatorname{tg} x = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$b) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$c) \sin y \cdot \cos(x + y) - \cos y \cdot \sin(x + y)$$

Př.8)Dokažte, že platí :

$$a) \sqrt{2} \cdot \cos\left(u - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin u - \cos u$$

$$b) \sin(u + v) + \cos(u - v) = (\sin u + \cos u) \cdot (\sin v + \cos v)$$

Řešení příkladů:

Př.1)

$$\sin x = -0,8$$

$$\operatorname{tg} x = 1, \bar{3}$$

$$\operatorname{citg} x = 0,75$$

Př.2)

$$\operatorname{tg} x = -3$$

$$\sin x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Př.3)

Platí

Př.4)

$$a) 1 + \sin x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$b) 2 \cos^2 x, \quad x \neq k\pi$$

$$c) \sin x \cdot \cos x, \quad x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$d) \cot gx, \quad x \neq k \frac{\pi}{2}$$

Př.5)

a) $K = \{58^\circ 17' + k \cdot 180^\circ, 328^\circ 17' + k \cdot 180^\circ\}, k \in \mathbb{Z}$

b) $K = \{90^\circ + 2k \cdot 180^\circ\}, k \in \mathbb{Z}$

Př.6)

a) *Platí*

b) *Platí*

Př.7)

a) $-\sin x$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$

c) $-\sin x$

Př.8)

a) *Platí*

b) *Platí*



ZDROJE:

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK.

Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 3. část.

1. vydání. Praha: SPN, 1985. Učebnice pro střední školy.