



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0394
Číslo materiálu	VY_42_Inovace_16_MA_1.22_ Kvadratická rovnice s parametrem – pracovní list
Název školy	Střední odborná škola a Střední odborné učiliště, Hustopeče, Masarykovo nám. 1
Autor	Mgr. Magda Černáková
Tematický celek	Matematika - ALGEBRA
Ročník	1.ročník
Datum tvorby	24.08.2013
Anotace	Prezentace určena pro první ročník maturitních oborů, ve které je stručné shrnutí učiva kvadratické rovnice s parametrem. Zopakuje jednotlivé druhy kvadratické rovnice s parametrem a jejich řešení. Současně PL slouží k přípravě k MZ.
Očekávaný výstup	Žák si zopakuje jednotlivé druhy kvadratické rovnice s parametrem a jejich řešení.
Druh učebního materiálu	Jednotlivé snímky lze použít jako studijní materiál.
Pokud není uvedeno jinak, uvedený materiál je z vlastních zdrojů autora	

Vzorový příklad:

a) Zjistěte, pro která $c \in \mathbb{R}$ má kvadratická rovnice

$$3x^2 - x + c = 0 \quad \text{s neznámou } x$$

1) dva vzájemně různé kořeny

2) dvojnásobný kořen

3) prázdnou množinu kořenů

$$a = 3, b = -1, c = c$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 3 \cdot c = 1 - 12c$$

$$1) D > 0$$

$$1 - 12c > 0$$

$$-12c > -1$$

$$c < \frac{1}{12}$$

$$c \in \left(-\infty, \frac{1}{12}\right)$$

Rovnice má dva vzájemně různé kořeny pro

$$c \in \left(-\infty, \frac{1}{12}\right).$$

$$2) D = 0$$

$$1 - 12c = 0$$

$$-12c = -1$$

$$c = \frac{1}{12}$$

$$c \in \left\{ \frac{1}{12} \right\}$$

Rovnice má dvojnásobný kořen pro $c \in \left\{ \frac{1}{12} \right\}$.

$$3) D < 0$$

$$1 - 12c < 0$$

$$-12c < 0$$

$$c > \frac{1}{12}$$

Rovnice má prázdnou množinu kořenů pro $c \in \left(\frac{1}{12}, \infty \right)$.

$$c \in \left(\frac{1}{12}, \infty \right)$$

b) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $px^2 + (2p + 3)x + p + \frac{3}{4} = 0$ s parametrem $p \in \mathbb{R}$.

$$p = 0$$

$$0 \cdot x^2 + (2 \cdot 0 + 3)x + 0 + \frac{3}{4} = 0$$

$$3x + \frac{3}{4} = 0$$

$$3x = -\frac{3}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$p \neq 0$$

$$a = p, \quad b = 2p + 3, \quad c = p + \frac{3}{4}$$

$$D = b^2 - 4ac = (2p + 3)^2 - 4.p.\left(p + \frac{3}{4}\right)$$

$$D = 4p^2 + 12p + 9 - 4p^2 - 3p = 9p + 9$$

$$\underline{D > 0}$$

$$9p + 9 > 0$$

$$9p > -9$$

$$p > -1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(2p + 3) \pm \sqrt{9p + 9}}{2p}$$

$$\underline{D = 0}$$

$$9p + 9 = 0$$

$$p = -1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(2p + 3)}{2p} = \\ &= \frac{-(-2 + 3)}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{D\langle 0}$$

$$9\,p+9\langle 0$$

$$p\langle -1$$

$$K=\phi$$

$$p=0\Rightarrow K=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

$$p\neq 0\wedge p\rangle-1\Rightarrow K=\left\{\frac{-(2\,p+3)\pm\sqrt{9\,p+9}}{2\,p}\right\}$$

$$p=-1\Rightarrow K=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$p\langle-1\Rightarrow K=\phi$$

Pracovní list:

Př.1) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici s parametrem $m \in \mathbb{R}$:

$$a) (m^2 - 1)x^2 + 2mx + 1 = 0$$

$$b) m^2 x^2 + 2m^2 x + (1 + m^2) = 0$$

$$c) mx^2 + (2m + 1)x + m - 4 = 0$$

$$d) mx^2 + 6m^2 x + m = 0$$

$$e) \frac{x}{x+m} + \frac{2x}{x-m} = \frac{5m^2}{4(x^2 - m^2)}$$

Pr.2)

a) $2x^2 + mx - m^2 = 0$

b) $m^2x^2 + mx - 1 = 0$

c) $x^2 + mx - m^2 = 0$

d) $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

e) $3x^2 - mx - 10m^2 = 0$

f) $x^2 - mx - 6m^2 = 0$

g) $4x^2 - 2mx - 12m^2 = 0$

h) $x^2 + 12mx - 28m^2 = 0$

i) $x^2 - 14mx + 49m^2 = 0$

j) $mx^2 - 15x - 7 = 0$

k) $mx^2 + 12x - 3 = 0$

Pr.3)

a) $\frac{x+m}{x} + \frac{x}{x+m} = \frac{m^2}{x(x+m)}$

b) $\frac{2x}{x+m} + \frac{x}{x-m} = \frac{m^2}{4x^2 - 4m^2}$

c) $\frac{2x}{x-m} + \frac{12x^2}{m^2 - x^2} = \frac{m-x}{x+m}$

d) $m+x = \frac{1}{m} + \frac{1}{x}$

e) $x + \frac{1}{x} = \frac{m^2 + 4}{2m}$

f) $x - \frac{1}{x} = \frac{4m^2 - 9}{6m}$

g) $\frac{1}{m} + \frac{1}{x+m} + \frac{1}{2x+m} = 0$

Řešení příkladů:

Př.1)

$$a) m = 1 \Rightarrow K = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$m = -1 \Rightarrow K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow K = \left\{ \frac{-1}{m-1}, \frac{-1}{m+1} \right\}$$

$$b) m \in \mathbb{R} \Rightarrow K = \emptyset$$

$$c) m < -0,05 \Rightarrow K = \emptyset$$

$$m = -0,05 \Rightarrow K = \{9\}$$

$$m > -0,05 \wedge m \neq 0 \Rightarrow K = \left\{ \frac{-2m-1 \pm \sqrt{20m+1}}{2m} \right\}$$

$$m = 0 \Rightarrow K = \{4\}$$

$$d)m = 0 \Rightarrow K = R$$

$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow K = \{-1\}$$

$$m = -\frac{1}{3} \Rightarrow K = \{1\}$$

$$m \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow K = \emptyset$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \Rightarrow K = \left\{-3p \pm \sqrt{9m^2 - 1}\right\}$$

$$e)m = 0 \Rightarrow K = \emptyset$$

$$m \neq 0 \Rightarrow K = \left\{\frac{m}{2}, -\frac{5m}{6}\right\}$$

Př.2)

a) pro $m = 0$, $K = \{0\}$

$$\textit{pro } m \neq 0, \ K = \left\{ \frac{m}{2}, -m \right\}$$

b) pro $m = 0$, $K = \emptyset$

$$\textit{pro } m \neq 0, \ K = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2m}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2m} \right\}$$

c) pro $m = 0$, $K = \{0\}$

$$\textit{pro } m \neq 0, \ K = \left\{ \frac{-m + m\sqrt{5}}{2}, \frac{-m - m\sqrt{5}}{2} \right\}$$

d) $K = \{m+1, m-1\}$

$$e) \text{ pro } m = 0, \quad K = \{0\}$$

$$\text{pro } m \neq 0, \quad K = \left\{ 2m, -\frac{5}{3}m \right\}$$

$$f) \text{ pro } m = 0, \quad K = \{0\}$$

$$\text{pro } m \neq 0, \quad K = \{3m, -2m\}$$

$$g) \text{ pro } m = 0, \quad K = \{0\}$$

$$\text{pro } m \neq 0, \quad K = \left\{ 2m, -\frac{3}{2}m \right\}$$

$$h) \text{ pro } m = 0, \quad K = \{0\}$$

$$\text{pro } m \neq 0, \quad K = \{2m, -14m\}$$

$$i) \quad K = \{7m\}$$

$$j) \text{ pro } m = \left(-\frac{225}{28}\right), \quad K = \left\{-\frac{14}{15}\right\}$$

$$\text{pro } m \rangle \left(-\frac{225}{28}\right), \quad m \neq 0, \quad K = \left\{\frac{15 + \sqrt{225 + 28m}}{2m}, \frac{15 - \sqrt{225 + 28m}}{2m}\right\}$$

$$k) \text{ pro } m = (-12), \quad K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{pro } m \rangle (-12), \quad m \neq 0, \quad K = \left\{\frac{-6 + \sqrt{36 + 3m}}{m}, \frac{-6 - \sqrt{36 + 3m}}{m}\right\}$$

Př.3)

a) $K = \emptyset$

b) *pro* $x \neq \pm m$, $m \neq 0$, $K = \left\{ \frac{m}{2}, -\frac{m}{6} \right\}$

c) *pro* $x \neq \pm m$, $m \neq 0$, $K = \left\{ \frac{m}{3}, -\frac{m}{3} \right\}$

d) *pro* $x \neq 0$, $m \neq 0$, $K = \left\{ \frac{1}{m}, -m \right\}$

e) *pro* $x \neq 0$, $m \neq 0$, $m = 2$, $K = \{1\}$

pro $x \neq 0$, $m \neq 0$, $m = -2$, $K = \{-1\}$

pro $x \neq 0$, $m \neq 0$, $|m| > 4$, $K = \left\{ \frac{m}{2}, \frac{2}{m} \right\}$

f) *pro* $x \neq 0$, $m \neq 0$, $K = \left\{ \frac{2m}{3}, -\frac{3}{2m} \right\}$

g) *pro* $x \neq -m$, $m \neq 0$, $x \neq \frac{m}{2}$, $K = \left\{ \frac{m(-3 + \sqrt{3})}{2}, \frac{m(-3 - \sqrt{3})}{2} \right\}$



Zdroje :

VEJSADA, František, Vladimír POLESNÝ, František TALAFIOUS a Karel ŠILHÁČEK. *Sbírka úloh z algebry pro I.-III. ročník*. Vyd. 2. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964, 257 s. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985, 530 s. Pomocné knihy pro žáky.