



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0394
Číslo materiálu	VY_42_Inovace_18_MA_4.02_ Geometrická posloupnost– pracovní list
Název školy	Střední odborná škola a Střední odborné učiliště, Hustopeče, Masarykovo nám. 1
Autor	Mgr. Magda Černáková
Tematický celek	Matematika - ALGEBRA
Ročník	4.ročník
Datum tvorby	24.08.2013
Anotace	Prezentace určena pro čtvrtý ročník maturitních oborů, ve které je stručné shrnutí učiva geometrická posloupnost. Zopakuje jednotlivé druhy úloh a jejich řešení. Současně PL slouží k přípravě k MZ.
Očekávaný výstup	Žák si zopakuje jednotlivé druhy úloh na řešení geometrické posloupnosti.
Druh učebního materiálu	Jednotlivé snímky lze použít jako studijní materiál.
Pokud není uvedeno jinak, uvedený materiál je z vlastních zdrojů autora	

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická** právě tehdy, když existuje reálné číslo q tak, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\mathbf{a_{n+1} = a_n \cdot q}$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Pro $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ platí:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro každé $n \in \mathbb{Z}^+$:
$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Nechť r, s jsou libovolná celá kladná čísla, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost s kvocientem q . Pak platí:
$$\mathbf{a_s = a_r \cdot q^{s-r}}$$

Nechť n je libovolné celé kladné číslo, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost s kvocientem q . Pak platí:

$$a) \text{ pro } q = 1 \Rightarrow s_n = na_1$$

$$b) \text{ pro } q \neq 1 \Rightarrow s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Vzorový příklad:

a) V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 6$, $a_2 = 24$.
Určete kvocient této posloupnosti a dále pak její členy a_5 , a_8 .

$$a_2 = a_1 \cdot q \qquad a_5 = a_2 \cdot q^{5-2} \qquad a_8 = a_2 \cdot q^{8-2}$$

$$24 = 6 \cdot q \qquad a_5 = 24 \cdot 4^3 \qquad a_8 = 24 \cdot 4^6$$

$$q = 4 \qquad a_5 = 1536 \qquad a_8 = 98304$$

b) V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je $a_4 = 1/3$, $a_5 = 1/9$.
Vypočítejte součet prvních sedmi členů této posloupnosti.

$$q = \frac{a_5}{a_4} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$$

$$a_1 = a_4 \cdot q^{1-4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$$

$$s_7 = a_1 \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 9 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 9 \cdot \frac{\frac{1 - 3^7}{3^7}}{\frac{1 - 3}{3}} = 9 \cdot \frac{1 - 2187}{3^7} \cdot \frac{3}{-2} =$$

$$= \frac{-2186}{3^4 \cdot (-2)} = 13,5$$

c) V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 - a_3 = -1,5$, $a_2 + a_1 = 1,5$.
Určete součet prvních pěti členů této posloupnosti.

$$a_1 - a_3 = -1,5 \quad ; a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$\underline{a_2 + a_1 = 1,5} \quad ; a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_1 - a_1 \cdot q^2 = -1,5$$

$$\underline{a_1 \cdot q + a_1 = 1,5}$$

$$a_1(1 - q^2) = -1,5$$

$$\underline{a_1(q + 1) = 1,5} \Rightarrow a_1 = \frac{1,5}{q + 1}$$

$$\frac{1,5}{q + 1}(1 - q^2) = -1,5$$

$$\frac{1,5}{q + 1}(1 - q)(1 + q) = -1,5$$

$$1,5(1 - q) = -1,5$$

$$1,5 - 1,5q = -1,5$$

$$-1,5q = -3$$

$$q = 2$$

$$a_1 \cdot q = 1,5$$

$$a_1 \cdot 3 = 1,5$$

$$a_1 = 0,5$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$$s_5 = 0,5 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1}$$

$$s_5 = 0,5 \cdot 31$$

$$s_5 = 15,5$$

Součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti je roven 15,5.

Pracovní list:

Př.1) Zjistěte, která z čísel 18, 12, 6, 0, -8 patří geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v níž je $a_1 = 27$, $q = -2/3$.

Př.2) Dokažte, že čísla $\sqrt{5}-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}+\sqrt{2}$ Jsou prvními třemi členy jisté geometrické posloupnosti.

Př.3) Dokažte, že posloupnosti

$$a) \left\{ \frac{2}{(-2)^n} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad b) \left\{ 2^n \cdot 3^{2-n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Jsou geometrické. Vypočítejte jejich kvocienty a prvních pět členů.

Př.4) Najděte součet prvních 10 členů geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 = -2$, $a_2 = 4$

Př.5) Určete první dva členy geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v níž je

$$a_3 = -\sqrt{20}, \quad a_4 = 10$$

Př.6) V nádobě je m gramů radonu. Jaké množství radonu zbude v nádobě za 36 dní, je-li jeho poločas přeměny 4 dny?

Př.7) V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí: $a_1 + a_3 = 5$

$$a_2 + a_4 = 10$$

Určete první člena kvocient posloupnosti.

Př.8) Kupec chtěl koupit koně. S prodáváčem se dohodl takto:

Koně dostane zadarmo, zaplatí pouze hřebíky v jeho podkovách. Každá Podkova je přibita 6 hřebíky, celkem jich je tedy 24. Za první hřebík zaplatí 1 groš, za druhý 2 groše, za každý další dvakrát tolik než za Předchozí. Kolik grošů by měl kupec zaplatit?

Řešení příkladů:

Př.1) Do geometrické posloupnosti patří čísla -8 a 12.

Př.2) Ano jsou to členy geometrické posloupnosti.

Př.3) a) Ano. Prvních pět členů: -1, 1/2, -1/4, 1/8, -1/16.

b) Ano. Prvních pět členů: 6, 4, 8/3, 19/9, 32/27.

Př.4) 682

Př.5) $a_1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}, a_2 = 2$

Př. 6) Po 36 dnech tam bude m^{1024} gramů radonu.

Př.7) $q = 2, a_1 = 1$

Př.8) 8 388 608 grošů



Zdroje:

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK.

Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních Odborných učilišť 6. část. 1.vydání. Praha: SPN, 1985. Učebnice pro střední školy.