



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0394
Číslo materiálu	VY_42_Inovace_19_MA_3.02_ Goniometrické vzorce – pracovní list
Název školy	Střední odborná škola a Střední odborné učiliště, Hustopeče, Masarykovo nám. 1
Autor	Mgr. Magda Černáková
Tematický celek	Matematika - ALGEBRA
Ročník	3.ročník
Datum tvorby	24.08.2013
Anotace	Prezentace určena pro třetí ročník maturitních oborů, ve které je stručné shrnutí učiva goniometrické vzorce Zopakuje jednotlivé druhy goniometrických vzorců a jejich úprav. Současně PL slouží k přípravě k MZ.
Očekávaný výstup	Žák si zopakuje jednotlivé druhy goniometrických vzorců a jejich úprav.
Druh učebního materiálu	Jednotlivé snímky lze použít jako studijní materiál.
Pokud není uvedeno jinak, uvedený materiál je z vlastních zdrojů autora	

Goniometrické vzorce :

1. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí : $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

2. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí : $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

Vzorový příklad :

a) Dokažte, že platí : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x = \\ &= (2 \cdot \sin x \cdot \cos x) \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x) = \\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

platí

$$b) \sin x = 0,6$$

$$\text{Určr: } \sin 2x, \cos 2x, \sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2} \text{ pro } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = -0,8$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot 0,6 \cdot (-0,8) = -0,96$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (-0,8)^2 - 0,6^2 = 0,64 - 0,36 = 0,28$$

$$\sin \frac{x}{2} \Rightarrow \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-0,8)}{2}} = \sqrt{\frac{1,8}{2}} = 0,95$$

$$\cos \frac{x}{2} \Rightarrow \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-0,8)}{2}} = \sqrt{\frac{0,2}{2}} = 0,32$$

c) *Dokažte, že platí* : $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \cdot \sin(x - y)$

$$\begin{aligned}\sin^2 x - \sin^2 y &= (\sin x + \sin y) \cdot (\sin x - \sin y) = \\&= \left(2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right) \cdot \left(2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \right) = \\&= \left(2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right) = \\&= \sin \left(2 \cdot \frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{x-y}{2} \right) = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)\end{aligned}$$

platí

Pracovní list:

Př.1) Je dán $\cos x = 0,4$ a přitom $x \in (0, \pi/2)$.

Vypočítejte $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{cotg} 2x$, $\sin x/2$, $\cos x/2$, $\operatorname{tg} x/2$, $\operatorname{cotg} x/2$.

Př.2) Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Př.3) Řešte tyto rovnice:

$$a) \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \cot^2 x$$

$$b) \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$$

Př.4)

Dokažte, že platí pro všechna $x+y, x-y \neq (2k+1) \cdot 180^\circ$,
 $x \neq (2k+1) \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$a) \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \frac{x + y}{2}$$

$$b) \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x$$

Př.5) Dokažte, že platí:

$$a) \left| \cot gx \right| = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}$$

$$b) \left| \operatorname{tg} x \right| = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$$

$$c) \operatorname{tg} x + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$$

Řešení příkladů:

Př.1) $\sin 2x = 0,733$
 $\cos 2x = -0,67997$
 $\operatorname{tg} 2x = -1,0779$
 $\operatorname{cotg} 2x = -0,9277$
 $\sin x/2 = 0,5477$
 $\cos x/2 = 0,8366$
 $\operatorname{tg} x/2 = 0,65467$
 $\operatorname{cotg} x/2 = 1,5275$

Př.2) Platí

Př.3) a) $x \in \mathbb{R}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $K = \{ 15^\circ + k\pi, 75^\circ + k\pi \}$

Př.4) a) Platí
b) Platí

Př.5) a) Platí
b) Platí
c) Platí



Zdroje:

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985, 530 s. Pomocné knihy pro žáky.

ODVÁRKO, Oldřich, Jana ŘEPOVÁ a Ladislav SKŘÍČEK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 3. část*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. Učebnice pro střední školy.